

Cours 5. Intégrale généralisée

Mathématiques 4

5 février 2024

Rappels sur les primitives et les intégrales sur un segment

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

Definition

Une primitive sur I d'une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la dérivée F' de F satisfait $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Rappel : si F est une primitive et c est une constante $F + c$ est encore une primitive. **Et il n'y en a pas d'autres !**

Théorème fondamental de l'analyse

L'intégrale d'une fonction continue (ou continue par morceaux) a été définie en TMB par limite de sommes de Riemann. Mais dans la pratique, on utilise des primitives connues et on utilise le *théorème fondamental de l'analyse* :

Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle fermé et borné I (aussi appelé segment). Soit F une primitive de f , alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Quelques primitives classiques vues en TMB

$$1) \int x^3 dx, \quad 2) \int \sin x \cos x dx, \quad 3) \int \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

- ❶ C'est une primitive usuelle $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (on oublie souvent le c pour désigner *une* primitive plutôt que *toutes* les primitives).
- ❷ On utilise une dérivée d'un produit $u(x) = \sin(x)$, $u'(x) = \cos(x)$ la dérivée de $\frac{(u(x))^2}{2}$ est $u(x)u'(x)$ donc

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{(u(x))^2}{2} = \frac{\sin^2(x)}{2}$$

- ❸ Même méthode avec $u(x) = \ln(x)$, $u'(x) = 1/x$ donc une primitive sur $]0, +\infty[$ est

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

Quelques primitives classiques vues en TMB (suite)

$$4) \int x \sin(x) dx, \quad 5) \int x \cos(x) dx, \quad 6) \int x e^x dx.$$

- ① On fait une intégration par partie : $u(x) = x$, $v'(x) = \sin(x)$, soit $v(x) = -\cos(x)$, $u'(x) = 1$:

$$\begin{aligned} \int v'(x)u(x)dx &= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \\ &= -x \cos(x) + \int \cos(x)dx = -x \cos(x) + \sin(x). \end{aligned}$$

- ② De même on obtient :

$$\int x \cos(x)dx = x \sin(x) + \cos(x),$$

- ③ De même on obtient :

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x.$$

Intégrales impropres

Pour une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I qui ne contient pas toutes ses bornes ou qui n'est pas borné, l'intégrale impropre est définie de l'une des manières suivantes.

- ❶ Dans le cas $I = [a, b[$ avec $a < b$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x)dx$$

- ❷ Dans le cas $I =]a, b]$ avec $a < b$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x)dx$$

- ❸ Dans le cas $I =]a, b[$ avec $a < b$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ on fixe un $c \in]a, b[$ et on pose

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Intégrales impropres (suite)

Ces définitions s'appliquent dès que les limites existent et sont finies. On dit alors que l'intégrale est **convergente**.

Dans cette partie du cours, on s'occupera surtout du cas $I = [a, b[$ puisque le cas $I =]a, b]$ est similaire. Le cas le plus simple est le cas suivant (car on va disposer de théorèmes de comparaison avec des fonctions *positives* de références) :

Definition

Une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I (comme dans la définition précédente) est dite **intégrable** sur I si $\int_a^b |f(x)|dx$ est convergente.

Dans ce cas, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est convergente et on dit même alors qu'elle est **absolument convergente**.

Exemples de référence (à *très bien* connaître)

- $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge et vaut 1. En effet, $\int_0^A e^{-x} dx = 1 - e^{-A} \rightarrow 1$ quand $A \rightarrow +\infty$.

Plus généralement, $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ **converge ssi** $a > 0$, **et vaut alors** $1/a$.

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ **converge si et seulement si** $\alpha > 1$ **et vaut alors**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}, \text{ pour } \alpha > 1.$$

La fonction intégrée étant positive, on écrit parfois

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = +\infty \text{ pour } \alpha \leq 1,$$

pour dire que cette intégrale diverge.

Exemples de référence (à *très bien* connaître) (II)

- Si $\alpha \neq 1$, $\int_1^A t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^A = \frac{A^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}$ et $A^{-\alpha+1} \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$ pour

$$-\alpha + 1 < 0 \iff \alpha > 1$$

or $A^{-\alpha+1} \rightarrow +\infty$ quand $A \rightarrow +\infty$ pour $\alpha < 1$.

- Si $\alpha = 1$, $\int_1^A \frac{1}{t} dt = \ln(A) \rightarrow +\infty$ quand $A \rightarrow +\infty$.

Exemples de référence (à *très bien* connaître) (III)

- $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ **converge si et seulement si** $\alpha < 1$ **et vaut alors**

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}, \text{ pour } \alpha < 1.$$

La fonction intégrée étant positive, on écrit parfois

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = +\infty \text{ pour } \alpha \geq 1,$$

pour dire que cette intégrale diverge.

En effet si $\alpha \neq 0$, on a $\int_a^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1-a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ et $a^{-\alpha+1} \rightarrow +\infty$ quand $a \rightarrow 0^+$ pour $\alpha > 1$, tandis que $a^{-\alpha+1} \rightarrow 0$ quand $a \rightarrow 0^+$ pour $\alpha < 1$.

Si $\alpha = 1$, on a $\int_a^1 \frac{1}{t} dx = |\ln(a)| \rightarrow +\infty$ quand $a \rightarrow 0^+$.

Exemples de référence (à *très bien* connaître) (IV)

- Attention toutefois : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = +\infty$ diverge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (en combinant les 2 points précédents).
- $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)} dt$ **diverge**.
En effet, on a $\int_e^A \frac{1}{t \ln(t)} dt = [\ln(\ln(t))]_e^A = \ln(\ln(A)) - \ln(1) \rightarrow +\infty$ quand $A \rightarrow +\infty$.
- $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)^\beta} dt$ **converge si et seulement si $\beta > 1$ et vaut alors $\frac{1}{\beta-1}$** (voir TD exo facultatif).

Théorèmes de comparaison (I)

On regarde une fonction continue par morceaux $f : I = [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et on étudie la nature de l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$.

On cherche une fonction continue par morceaux **positive** $g : I = [a, b[\rightarrow [0, +\infty[$ appropriée et on compare f à g . Les deux résultats de base à utiliser sont les suivants.

Théorème de comparaison. (I)

- 1 Si $f(x) = O(g(x))$ quand $x \rightarrow b^-$ et si $\int_a^b g(x)dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)dx$ converge (absolument).
- 2 Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [M, b[$ et si $\int_a^b g(x)dx = +\infty$ (i.e. diverge), alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Théorème de comparaison (II).

On considère toujours une fonction continue par morceaux **positive** $g : I = [a, b[\rightarrow [0, +\infty[$ appropriée et on compare f à g .

Théorème de comparaison. (II)

Supposons que $f(x) \sim g(x)$ quand $x \rightarrow b^-$. Alors,

- ① si $\int_a^b g(x)dx$ converge alors $\int_a^b f(x)dx$ converge ;
- ② si $\int_a^b g(x)dx = +\infty$ diverge alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$1/ \int_1^{+\infty} \frac{1 - \sin x}{x^2} dx, \quad 2/ \int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x} dx$$

- ① Pb de convergence en $+\infty$ (continue en 1 limite $(1 - \sin(1))$), on a

$$\left| \frac{1 - \sin x}{x^2} \right| \leq 2g(x) := \frac{2}{x^2}.$$

Par le théorème de comparaison II, l'intégrale converge absolument.

- ② Pb de convergence en $+\infty$ (continue en 1 limite $(\sin(1)/1)$) ;
l'équivalent simple à l'infini est $1/x^2$.

Par le théorème de comparaison II, l'intégrale converge absolument.

Exemples (suite)

Etudier la nature de :

$$3/ \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

Pb de convergence en $+\infty$ (continue en 1 limite 0/1) pour $x \geq e$,
 $\ln(x) \geq 1$ donc $\frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc par le théorème de comparaison I

$$\int_e^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} dx = +\infty$$

et donc vu que $\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} dx$ finie, on déduit $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} dx = +\infty$.

Une méthode pour le cas non intégrable : l'intégration par parties

Quand une intégrale fait intervenir une fonction "oscillantes" bornée ayant une primitive bornée, il peut être utile d'utiliser une intégration par parties (ou plusieurs) pour se ramener à une intégrale absolument convergente.

Cela permet de voir de la compensation un peu comme dans les séries alternées.

Un cas typique est

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx .$$

Intégrabilité de $\sin(x)/x$ sur \mathbb{R} .

- ① Quand $x \rightarrow 0$, $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$ donc $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.
- ② Calculons donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{\sin(x)}{x} dx$ en intégrant par parties :

$$\int_1^t \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{-\cos(t)}{t} + \frac{\cos(1)}{1} - \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

Or $\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc

$\int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2} dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$. De plus $\frac{\cos(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ d'où :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\cos(1)}{1} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

et on a donc montré la convergence de l'intégrale de départ.

Intégrales impropres : fin

On peut montrer que l'intégrale suivante est divergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

Donc une intégrale convergente n'est pas nécessairement absolument convergente !

Par ailleurs, on peut montrer la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$

En effet, avec le changement de variables $y = x^2$ on se ramène à

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{\sqrt{y}} dy$$

qui se traite comme l'intégrale impropre de $\sin(y)/y$.

Donc le fait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ soit convergente n'implique pas nécessairement que $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Approximations de la masse de Dirac (1)

Exemple

(Masse de Dirac approchée par une fonction en forme de bosse et intuition physique)

Soit ρ une fonction supportée sur $[-1, 1]$ positive avec $\int_{-1}^1 \rho(x) dx = 1$ (par exemple $\rho(x) = 1 + x$ si $x < 0$, $\rho(x) = 1 - x$ si $x > 0$).

Soit $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ est à support $[-1/n, 1/n]$.

On voit que ce changement d'échelle revient à regarder une bosse de même masse 1 mais "vue de loin". A la limite $n \rightarrow +\infty$, on va regarder de si loin que l'on ne verra plus qu'une "masse ponctuelle".

Approximations de la masse de Dirac (2)

Formellement, on a la limite de mesures

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{\rho_n} = \delta_0.$$

En effet, on a $T_{\rho_n}(f) = \int_{-1/n}^{1/n} f(x) \rho_n(x) dx$ est proche de $\int_{-1/n}^{1/n} f(0) \rho_n(x) dx = f(0)$ par continuité de f et vu le choix $\int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(x) dx = \int_{-1}^1 \rho(x) dx = 1$ par changement de variable.

On remarque que $\rho_n(x) \rightarrow 0$ si $x \neq 0$ et $\rho_n(0) = n \rightarrow +\infty$. Mais la limite simple $g = +\infty 1_{\{0\}}$ a une intégrale nulle $\int g(x) f(x) dx$.

La limite simple ne suffit pas à comprendre la “fonction généralisée” qu’est la mesure de Dirac. L’intégrale $\int f(x) \delta(dx) = f(0)$ est pourtant souvent notée $\int f(x) \delta_0(x) dx$ en physique (**pas** dans ce cours de mathématiques).

Exercices récapitulatif :

Etudier la convergence de :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} dx.$$

MERCI DE VOTRE ATTENTION !